

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ГРАНИЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При анализе технологических процессов и техническом обслуживании систем широко применяются методы теплового неразрушающего контроля. Применение математических методов для обработки результатов температурных измерений при тепловом мониторинге работающих систем и механизмов позволяет повысить надежность и долговечность оборудования, обеспечить безотказность процесса эксплуатации, оптимизировать параметры теплового воздействия на систему.

В статье рассмотрен метод решения задачи определения внутренних нестационарных температурных полей объекта, сформированных под влиянием внешнего теплового воздействия. Математически процесс теплопереноса представлен обратной граничной задачей с заданным дополнительным условием, сформированным на основании характеристик теплового воздействия на объект. В работе приведен численный метод решения задачи, основанный на применении явной конечно-разностной схемы. Точность и устойчивость представленного метода подтверждена результатами имитационного моделирования.

Ключевые слова: теплоперенос, обратная задача, численный метод, конечно-разностная схема, целостность информации, вычислительный эксперимент.

Gavrilova T.P.

METHOD FOR DETERMINING UNSTATIONARY TEMPERATURE FIELDS FROM THE RESULTS OF BOUNDARY MEASUREMENTS

Thermal non-destructive testing is widely used in the analysis of technological processes and maintenance of systems. The application of mathematical methods for processing the results of temperature measurements during thermal monitoring of operating systems and mechanisms allows to increase the reliability and durability of equipment, ensure the safety of the operation process, optimize the parameters of thermal effects on the system.

The article is devoted to a method for determining internal non-stationary temperature fields that are formed in object under the external thermal action. The heat transfer issue is represented by an inverse problem for a one-dimensional parabolic equation with initial, boundary condition and additional condition that are formed on the basis of the characteristics of the thermal effect on the object. We propose a numerical method for solving the inverse problem. This method based on the use of finite-difference implicit scheme. The accuracy and stability of the proposed method are confirmed by computational experiment results.

Keywords: heat transfer, inverse problem, numerical method, finite-difference scheme, information integrity, computational experiment.

Введение

При диагностике работающих систем и механизмов, управлении технологическими процессами термообработки необходимо гарантировать достоверность информации о внутреннем тепловом состоянии объектов. Источником этой информации являются температурные измерения, полученные вблизи поверхности объекта, подвергающегося термообработке. Актуальной является задача разработки высокоточных и устойчивых методов для определения температуры во внутренних точках объекта по результатам измерений вблизи поверхности.

Математическая модель процесса теплопередачи, при котором информация о внутреннем тепловом состоянии объекта определяется по результатам граничных измерений, относится к классу обратных задач. Теория обратных задач теплопереноса, ориентированная на восстановление неизвестных характеристик нестационарных тепловых процессов, является актуальным направлением современной теплотехники. Обратные задачи, связанные с процессами теплопереноса, изучали О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, Л. А. Коздоба, Ю. М. Мацевитый и многие другие исследователи [1–8]. Среди последних работ следует отметить труды А.Н. Дилигенской [9,10], Н.М. Япаровой [11].

Основной проблемой обратных граничных задач является зависимость погрешности численных решений от уровня шума в исходных данных. Применение к их решению классических методов приводит к неустойчивым решениям и искажению информации о тепловом состоянии объекта. Для повышения устойчивости решений такого рода задач используют методы регуляризации.

Разработке численных методов на основе регуляризирующих алгоритмов для обратных задач, представленных интегральными уравнениями, посвящены работы А.С. Апарцина, В.В. Васина, А.Н. Тихонова, А.Г. Яголы и других исследователей [12–16].

Численные методы, основанные на явных и неявных конечно-разностных схемах, представлены в работах П. Н. Вабищевича, А.А. Самарского, В. И. Васильева [17–21].

Постановка задачи

В статье рассматривается задача определения нестационарных температурных полей во внутренних точках изотропного тела, не содержащем внутренних источников тепла. Формирование полей происходит под влиянием внешнего теплового воздействия. Контролировать влияние этого воздействия можно путем проведения тепловых измерений вблизи поверхности. Согласно требованиям к процессу теплопереноса, тепловые потоки в теле распределяются равномерно во всех направлениях и зависят только от времени, также не допускаются резкие скачки температурных градиентов и существенные изменения основных характеристик материала объекта.

Для построения математической модели процесса теплопереноса введем следующие обозначения. Пусть функция $u(x,t)$ определяет значение температуры в точке x в текущий момент времени t . К началу процесса температура во всех точках объекта была одинаковой, поэтому полагаем, что $u(x, 0)=C$. По измеренным температурам на поверхности формируем функцию $\varphi(t)=u(0,t)$, а по измерениям температуры в точке наблюдения x_0 формируем функцию $g(t)=u(x_0,t)$. Пусть L – расстояние от поверхности тела до контрольной точки. Требуется определить температуру тела $u(L,t)=\psi(t)$ в контрольной точке A , а также вдоль линии, соединяющей точки O и A . Рис. 1.

Рассматриваемый процесс теплопереноса математически представим параболическим уравнением

$$u_t = a u_{xx}, \quad x \in (0, L), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

граничным и дополнительным условиями

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(0,t) = \varphi(t), \quad u(x_0,t) = g(t), \quad t \geq 0$$

а также начальным условием

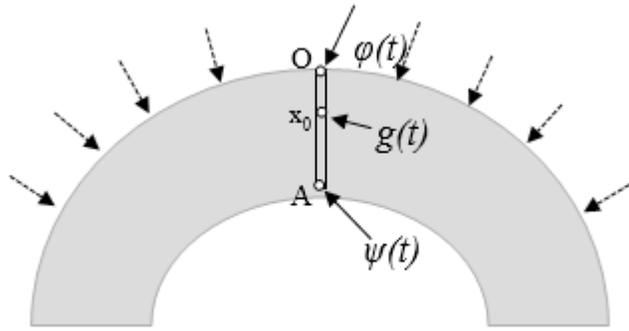


Рис. 1. Измерение температурных функций.
Температурные датчики расположены в точках O и x_0

$$u(x,0) = C, x \in [0, L]. \quad (3)$$

В задаче требуется найти значение температуры в контрольной точке

$$u(L,t) = \psi(t) \quad (4)$$

и, на основе полученной функции $\psi(t)$, спрогнозировать температурные значения во внутренних точках OA.

При формировании граничного и дополнительного условий задачи необходимо учитывать шум, который неизбежно возникает в результатах измерений. Ситуацию наличия шума представим следующим образом: пусть φ_0 и g_0 – истинные значения температуры на поверхности объекта и в точке наблюдения. Зашумленные значения в рассматриваемых точках обозначим как $\phi\delta$ и $g\delta$ соответственно, при этом $\max \{ \|\phi\delta - \varphi_0\|, \|g\delta - g_0\| \} \leq \delta$, где $\delta > 0$ уровень погрешности датчиков измерений, определяющий допустимый уровень отклонения данных. Таким образом, учитывая погрешности в исходных данных, неизбежно возникающие при измерениях, получаем задачу определения температурной функции $u_\delta(L,t)$ по зашумленным значениям δ , $\phi\delta$, $g\delta$ и определения температуры $u_\delta(x,t)$ во внутренних точках объекта.

Вычислительная схема метода

Для построения вычислительной схемы используем идею, предложенную в работе П.Н. Вабищевича [22]. Следуя этому подходу, построим неявную конечно-разностную схему.

Для решения задачи (1)–(4) введем в области $[0, L] \times [0, T]$ сетку с равноотстоящими узлами (x_j, t_j) :

$$x_i = ih_x, \quad i = 0, \dots, N, \quad N = L/h_x;$$

$$t_j = jh_t, \quad j = 0, \dots, M, \quad M = T/h_t.$$

Дискретные аналоги функции $u(x,t)$:

$$u(x_i, t_j) = u_{i,j},$$

$$u(0, t_j) = \varphi_j,$$

$$u(x_i, 0) = u_{i,0} = C,$$

$$u(L, t_j) = \psi_j.$$

Пусть точка x_0 является узлом сетки по пространственной переменной с номером r , т.е. $x_0 = rh_x$ тогда

$$u(x_0, t_j) = u_{r,j} = g_j. \quad (5)$$

Построим конечно-разностную аппроксимацию уравнения (1), используя четырехточечную разностную схему. При фиксированном j на каждом временном слое получаем следующее уравнение:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_t} - a \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h_x^2} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

Для проведения дальнейших вычислений введем следующие обозначения:

$$A_i = C_i = \frac{a}{h_x^2}, \quad B_i = -\frac{2a}{h_x^2} - \frac{1}{h_t}, \quad D_i = -\frac{1}{h_t} u_{i,j}, \quad (7)$$

$$A_0 = C_0 = 0, \quad B_0 = -\frac{1}{h_t} \cdot \frac{\varphi_j}{\varphi_{j+1}}, \quad D_0 = -\frac{1}{h_t} \cdot \varphi_j.$$

Тогда уравнение (6) примет вид:

$$A_i u_{i-1,j+1} + B_i u_{i,j+1} + C_i u_{i+1,j+1} = D_i, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (8)$$

Согласно подходу, предложенному в [22], сеточный аналог температурной функции $u(x,t)$ в точке (x_j, t_j) представим с помощью двух вспомогательных функций в следующем виде

$$u_{i,j} = y_{i,j} + \psi_j \cdot z_{i,j}, \quad i = 0, \dots, N. \quad (9)$$

При $i=N$ имеем $u_{N,j} = y_{N,j} + \psi_j \cdot z_{N,j}$ и, учитывая граничное условие $u_{N,j} = \psi_j$ задачи (1)–(4), получим $y_{N,j} = 0$ и $z_{N,j} = 1$.

Подставляя выражение (9) в уравнение (8), получим следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1,j+1} + B_i y_{i,j+1} + C_i y_{i+1,j+1} = D_i, & i = 1, \dots, N-1, \\ y_{N,j} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_i z_{i-1,j+1} + B_i z_{i,j+1} + C_i z_{i+1,j+1} = 0, & i = 1, \dots, N-1, \\ z_{N,j} = 1 \end{cases}$$

где коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i определяются по формулам (7).

Решая системы методом прогонки, определим на каждом j -ом временном слое сеточные функции y_{ij} и z_{ij} при $i = 1, \dots, N$.

Подставляя в равенство (9) конечно-разностный аналог дополнительного условия в узле сетки x_r , получим равенство $g_j = y_{rj} + \psi_j \cdot z_{rj}$. Тогда дискретный аналог температурной функции в контрольной точке определим по формуле $\psi_j = \frac{g_j - y_{r,j}}{z_{r,j}}$ для всех $j = 1, \dots, M$ при условии $z_{r,j} \neq 0$.

Вычислительный эксперимент

С целью проверки точности и устойчивости предложенного способа определения температурных полей объекта из поверхностных измерений проводился вычислительный эксперимент. В ходе эксперимента выполнялось сопоставление решений, полученных с помощью предложенного алгоритма с тестовыми значениями, сформированными на основе имитационного моделирования, а также были получены экспериментальные оценки погрешностей метода. Вычислительный эксперимент включает следующие этапы:

1. Формируем тестовые значения функции $u(x,t)$ в узлах сетки (x_r, t_j) следующим образом. Полагая, что температурная функция $\psi(t)$ нам известна, с помощью неявной схемы находим численное решение прямой задачи:

$$u_t = au_{xx}, \quad x \in (0, L), \quad t \geq 0, \quad (10)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(L, t) = \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (11)$$

$$u(x, 0) = C, \quad x \in [0, L]. \quad (12)$$

Далее моделируем дискретный аналог функции $g(t)$ по формуле $g(t_j) = u(x_r, t_j)$.

Затем вводим аддитивный шум в исходные данные:

$$g_\delta(t_j) = g(t_j) + \eta_\delta(t_j), \quad \varphi_\delta(t_j) = \varphi(t_j) + \mu_\delta(t_j),$$

где $\eta_\delta(t_j)$ и $\mu_\delta(t_j)$ являются случайными величинами, распределенными равномерно на $[-\delta, \delta]$.

2. На основании предложенного численного метода находим решение $\psi_\delta(t)$ задачи (1)–(3).

3. Оцениваем погрешности определения температуры с помощью функции $\Delta(t) = |\psi_\delta(t) - \psi(t)|$, величин $\Delta_\psi = \max_{t \in [0, T]} \Delta(t)$ и $\varepsilon_\psi = \frac{\Delta_\psi}{\max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|}$.

4. Определяем тепловое поле $u_\delta(x, t)$ во внутренних точках линейного объекта на основе температурной функции $\psi_\delta(t)$.

Вычислительный эксперимент проводился при следующих данных: $L=1$, $T=6000$ с, $u(x, 0)=50^\circ\text{C}$, коэффициент температуропроводности $a=1$.

Результаты вычислительного эксперимента

Приведем результаты вычислительного эксперимента, проведенного для следующих типов тестовых функций:

1) смоделируем распределение температуры в точке на поверхности объекта функцией $\varphi_1(t) = 45 + 1500t(e^{-t} - e^{-3})$, а в контрольной точке – функцией $\psi_1(t) = 45 + 750te^{-t}$;

2) смоделируем распределение температуры в точке на поверхности объекта функцией $\varphi_2(t) = 60 + 2400e_{-2,3t} \ln(t+1)$, а в контрольной точке – функцией $\psi_2(t) = 60 + 2000e^{-2,8t} \ln(t+1)$.

В таблице 1 представлены результаты имитационного моделирования для первой модели теплопереноса с тестовыми функциями $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ при различных способах выбора точки наблюдения x_0 и различных значениях погрешностей исходных данных.

Таблица 1

Экспериментальные оценки погрешностей температурных функций для модели 1

Точка наблюдения	Погрешность исходных данных, δ	Погрешности вычислений	
		Δ_ψ	θ_ψ
$x_0=0,1 \cdot L$	0,01	118,2624	0,3685
	0,05	397,5678	1,2389
	0,1	560,5154	1,7466
$x_0=0,8 \cdot L$	0,01	23,1770	0,0722
	0,05	29,1066	0,0907
	0,1	35,6682	0,1111

Функция погрешности определения температуры для модели 1 представлена на рис. 2. Графики тестовой функции $\psi_1(t)$ и численного решения $\psi_\delta(t)$ задачи (1)–(4) приведе-

ны на рис. 3. На рис. 4 построены поверхности $u_\delta(x, t)$, соответствующие температурным полям в линейном объекте, сформированным на основе численных решений $\psi_\delta(t)$.

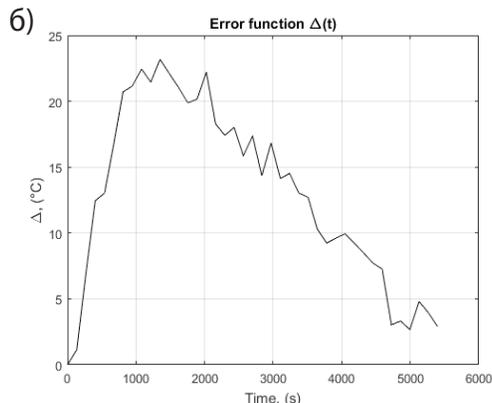
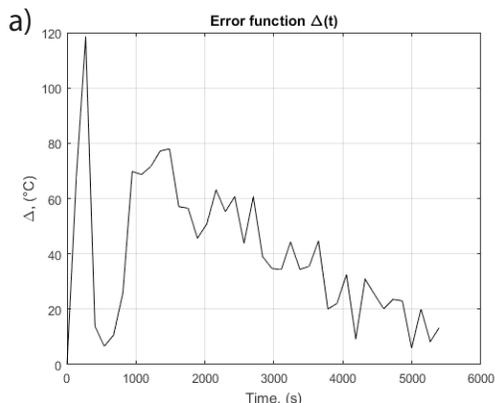


Рис. 2. График функции температурной погрешности $\Delta(t)$ для модели 1
а) при $x_0=0,1-L$, б) при $x_0=0,8-L$

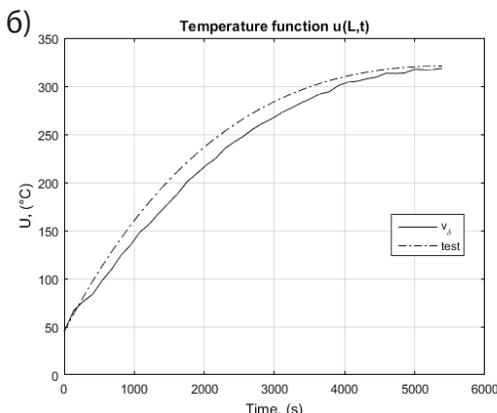
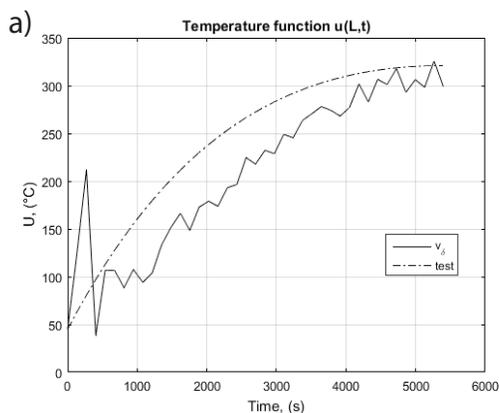


Рис. 3. График численного решения и тестовой функции для модели 1
а) при $x_0=0,1-L$, б) при $x_0=0,8-L$

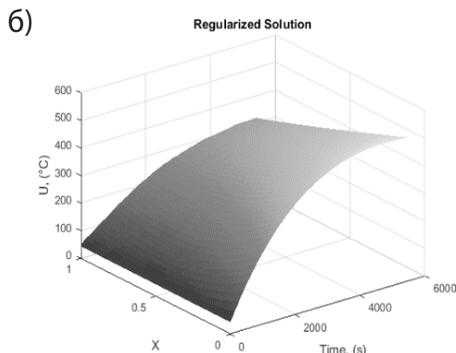
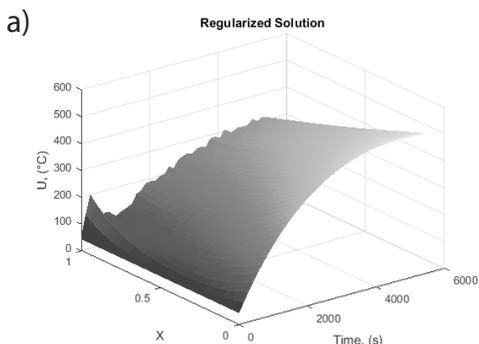


Рис. 4. Распределение температуры внутри линейного объекта для модели 1
а) результаты моделирования температуры при $x_0=0,1-L$,
б) результаты моделирования температуры при $x_0=0,8-L$

В таблице 2 представлены результаты вычислительного эксперимента для второй модели теплопереноса с тестовыми функциями

$\psi_2(t)$ и $\psi_2(t)$ при различных способах выбора точки наблюдения x_0 .

Функция погрешности определения

Экспериментальные оценки погрешностей температурных функций для модели 2

Точка наблюдения	Погрешность исходных данных, δ	Погрешности вычислений	
		Δ_ψ	θ_ψ
$x_0=0,1 \cdot L$	0,01	98,5247	0,3438
	0,05	544,2646	1,8994
	0,1	861,1171	3,0051
$x_0=0,8 \cdot L$	0,01	28,7040	0,0935
	0,05	38,9877	0,1360
	0,1	57,7243	0,2014

температуры для модели 2 представлена на рис. 5. Графики тестовой функции $\psi_2(t)$ и численного решения $\psi_\delta(t)$ задачи (1)–(4) приведены на рис. 6. На рис. 7 построены поверхно-

сти $u_\delta(x, t)$, соответствующие температурным полям в линейном объекте, определенным на основе граничных условий, найденных предложенным численным методом.

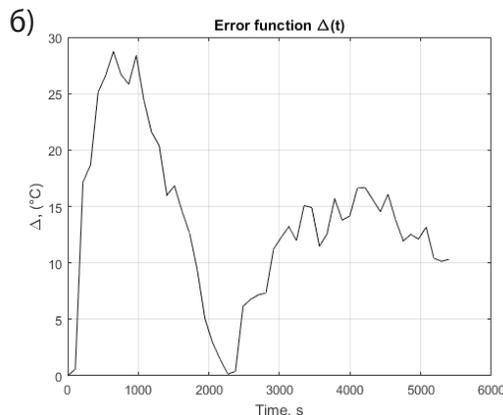
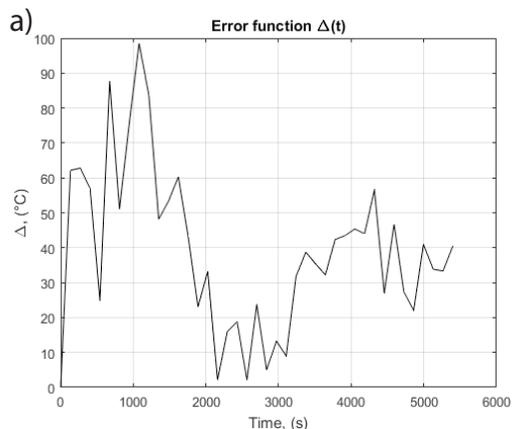


Рис. 5. График функции температурной погрешности $\Delta(t)$ для модели 2
а) при $x_0=0,1 \cdot L$, б) при $x_0=0,8 \cdot L$

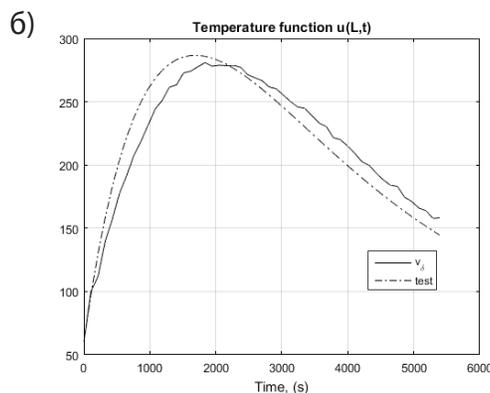
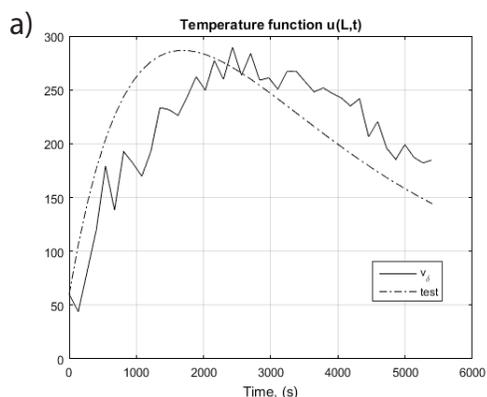


Рис. 6. График численного решения и тестовой функции для модели 2
а) при $x_0=0,1 \cdot L$, б) при $x_0=0,8 \cdot L$

Результаты вычислительного эксперимента свидетельствуют об устойчивости

предложенного метода определения температуры. В ходе эксперимента выявлена зави-

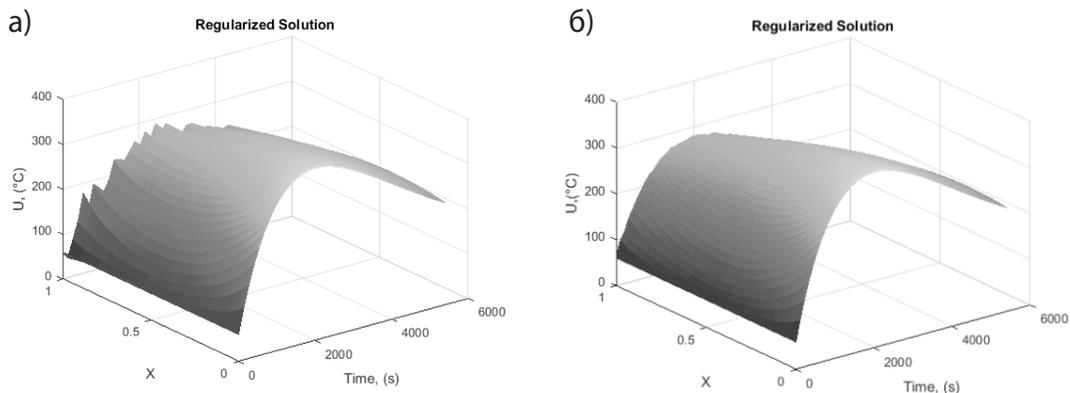


Рис. 7. Распределение температуры внутри линейного объекта для модели 2
 а) результаты моделирования температуры при $x_0=0,1 \cdot L$,
 б) результаты моделирования температуры при $x_0=0,8 \cdot L$

симость оценки погрешностей температурных функций от выбора точки x_0 . Погрешность уменьшается при удалении точки наблюдения от граничной точки O линейного объекта.

Заключение

В данной работе рассмотрена задача определения внутренних нестационарных температурных полей, сформированных под влиянием внешнего теплового воздействия. Учитывая характеристики теплопереноса, математически процесс представлен обратной граничной задачей для параболического уравнения с известными вблизи границы

температурными функциями. Численное решение задачи определения температуры основано на применении неявной конечно-разностной схемы.

Результаты вычислительного эксперимента, проведенного на основе имитационного моделирования, подтверждают точность и устойчивость представленного численного метода определения температурных функций внутри объекта. В ходе эксперимента выявлено уменьшение отклонений температурных значений, полученных численным методом от тестовых при удалении точки наблюдения от поверхности объекта.

Литература

1. Алифанов О. М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
2. Мацевитый Ю. М. Параметрическая и функциональная идентификация тепловых процессов // Мацевитый Ю. М., Гайшун И. В., Борухов В. Т., Костиков А. О. Пробл. машиностроения, 2011. Т. 14, № 3. С. 40–47.
3. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. – М.: Наука. Физматлит, 1988. – 285 с.
4. Коздоба Л. А., Круковский П. Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. – Киев: Наук. думка, 1982. – 358 с.
5. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности. Методология. – Киев: Наук. думка, 2002. – 408 с.
6. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена / Алифанов О.М. – М: Машиностроение, 1988. – 280 с.
7. Бек Д. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Бек Д., Блакуэлл Б., Сент-Клер Ч, мл.– М.: Мир, 1989. – 312 с.
8. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. / Ватульян А. О. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
9. Дилигенская А. Н. Метод минимаксной оптимизации в двумерной граничной обратной задаче теплопроводности // Дилигенская А. Н. ТВТ, 2019. Т. 57, выпуск 2. С. 226–233.
10. Дилигенская А. Н. Решение граничных обратных задач теплопроводности на основе методов оптимизации // Дилигенская А. Н. № 3(191), 2016. С. 46–50.

11. Yaparova N. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem / Yaparova N. // *Inverse Problems in Science and Engineering*. – 2014. – Vol.22, no 5. – P. 832–847.
12. Апарцин А.С. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм / Апарцин А.С., Бакушинский А.Б. // *Дифференциальные и интегральные уравнения*. – Иркутск: Иркут. гос. ун-т. – 1972. – Вып. 1. – С. 248–258.
13. Васин В.В. Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода / Васин В.В. // *Выч. технологии*. – 2010. – Т.15, № 2. – С. 15–23.
14. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
15. Cialkowski M. A sequential and global method of solving an inverse problem of heat conduction equation / Cialkowski M., Grysa K. // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. – 2010. – Vol. 48, no. 1. – P. 111–134.
16. Кумицкий Б.М. Математическое моделирование тепловых процессов в условиях промерзания (оттаивания) влажного грунта / Кумицкий Б.М., Саврасова Н.А., Седаев А.А. // *Научный журнал строительства и архитектуры*. – Воронеж: Воронежский гос. тех. ун-т. – 2018. № 3(51). – С. 31–39.
17. Слепян Л.И. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики / Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. – Л.: Судостроение, 1980. – 343 с.
18. Тихонов А.Н. Численные методы решения некорректных задач / Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
19. Криксин Ю.А. Обратная задача восстановления источника для уравнения конвективной диффузии / Криксин Ю.А., Плющев С.Н., Самарская Е.А., Тишкин В. Ф. // *Математическое моделирование* –1995, 7:11. – С. 95–108.
20. Самарский А.А. Численные методы решения обратных задач / Самарский А.А., Вабищевич П.Н. – М.: ЛКИ, 2007. – 480 с.
21. Borukhov V. T. Numerical solving an inverse problem of source reconstruction for a parabolic equation // Borukhov V. T., Vabishchevich P. N., *Matem. Mod.*, –1998, 10:11. – P. 93–100.
22. Вабищевич П. Н. Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения / Вабищевич П. Н., Васильев В. И., Васильева М. В. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 2015, 55:6. – С. 1020–1027.

References

1. Alifanov O. M. Identifikacija processov teploobmena letatel'nyh apparatov [Identification of heat exchange processes of flying apparatuses]. Moskva: Mashinostroenie, 1979. – 216 p.
2. Matsevityi Yu. M., Gaishun I. V., Borukhov V. T., Kostikov A. O. Parametricheskaja i funkcional'naja identifikacija teplovyh processov [Parametric and functional identification of thermal processes]. *Probl. mashinostroeniya*, 2011, vol. 14, no. 3. – P. 40–47.
3. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rummyantsev S. V. Jekstremal'nye metody reshenija nekorrektnykh zadach i ih prilozhenija k obratnym zadacham teploobmena [Extreme methods methods of solving ill-posed problems and their applications to inverse heat transfer problems]. - Moskva: Nauka. Fizmatlit, 1988. – 285 p.
4. Kozdoba L. A., Krukovsky P. G. Metody reshenija obratnykh zadach teploperenosa [Methods for solving inverse heat transfer problems]. - Kiyev: Nauk. dumka, 1982. – 358 p.
5. Matsevityi Yu. M. Obratnye zadachi teploprovodnosti. Metodologija [Inverse problems of thermal conductivity. Methodology]. Kiyev: Nauk. dumka, 2002. – 408 p.
6. Alifanov O. M. Obratnye zadachi teploobmena [Inverse problems of heat exchange]. Moskva: Mechanical Engineering, 1988. – 280 p.
7. Beck D., Blahwell B., St. Clair Ch, ml. Nekorrektnye obratnye zadachi teploprovodnosti [Incorrect inverse problems of thermal conductivity]. Moskva: Mir, 1989. – 312 p.
8. Vatulyan A. O. Obratnye zadachi v mehanike deformiruемого tverdogo tela [Inverse problems in the mechanics of a deformable solid]. Moskva: Fizmatlit, 2007. – 224 p.
9. Diligenskaya A. N. Metod minimaksnoj optimizacii v dvumernoj granichnoj obratnoj zadache teploprovodnosti [Minimax optimization method in a two-dimensional partial inverse problem of thermal conductivity]. *TVT*, 2019, vol. 57, no. 2. – P. 226–233.
10. Diligenskaya A. N. Reshenie granichnykh obratnykh zadach teploprovodnosti na osnove metodov optimizacii [Solution of boundary inverse problems of thermal conductivity based on optimization methods]. No. 3(191), 2016. – P. 46–50.
11. Yaparova N. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2014, vol.22, no. 5. – P. 832–847.

12. Apartsin A. S., Bakushinsky A. B. Approximate solution of Volterra integral equations of the first generation by the method of quadrature sums Differential and integral equations [Priblizhennoe reshenie integral'nyh uravnenij Vol'terra I roda metodom kvadraturnyh summ]. Irkutsk: Irkut. state un-t, 1972, vol. 1. – P. 248-258.
13. Vasin V. V. Regular algorithm for approximation of nonsmooth solutions for Fredholm integral equations of the first kind [Reguljarnyj algoritm approksimacii nekladkih reshenij dlja integral'nyh uravnenij Fredgol'ma pervogo roda]. Vych.tekhnologii, 2010, vol. 15, no. 2. – P. 15–23.
14. Lavrentiev M. M., Romanov V. G., Shishatsky S. P. Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza [Incorrect problems of mathematical physics and analysis]. Moscow: Nauka, 1980. – 286 p.
15. Cialkowski M., Grysa K. A sequential and global method of solving an inverse problem of heat conduction equation. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010, vol. 48, no. 1. – P. 111–134.
16. Kumitsky B. M., Savrasova N. A., Sedaev A. A. Mathematical modeling of thermal processes in conditions of freezing (thawing) of wet soil [Matematicheskoe modelirovanie teplovyh processov v uslovijah promerzaniya (ottaivaniya) vlazhnogo grunta]. Scientific Journal of Construction and Architecture. Voronezh: Voronezh State Technical University. un-t, 2018, no. 3(51). – P. 31–39.
17. Slepyan, L. I., Yakovlev, Yu. P. Integral'nye preobrazovaniya v nestacionarnyh zadachah mehaniki [Integral transforms in nonstationary problems mechanical key]. Leningrad: Shipbuilding, 1980. – 343 p.
18. Tikhonov A. N., Goncharsky A.V., Stepanov V. V., Yagola A. G. Chislennye metody reshenija nekorrektnyh zadach [Numerical methods for solving ill-posed problems]. Moskva: Nauka, 1990. – 232 p.
19. Kriksin Ju.A., Pljushhev S.N., Samarskaja E.A., Tishkin V. F. Inverse problem of reconstructing the source for the equation of convective diffusion. [Obratnaja zadacha vosstanovlenija istochnika dlja uravnenija konvektivnoj diffuzii] Mathematical modeling, 1995, 7:11. – P. 95–108.
20. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N. Chislennye metody reshenija obratnyh zadach [Numerical methods for solving inverse problems]. Moskva: LKI, 2007. – 480 p.
21. Borukhov V. T., Vabishchevich P. N. Numerical solving an inverse problem of source reconstruction for a parabolic equation. Matem. Mod., 1998, 10:11. – P. 93–100.
22. Vabishevich P. N., Vasiliev V. I., Vasilyeva M. V. Computational identification of the right part of the parabolic equation [Vychislitel'naja identifikacija pravoj chasti parabolicheskogo uravnenija]. Zh. matem. and math. phys. - 2015, 55:6. – P. 1020-1027.

ГАВРИЛОВА Татьяна Петровна, старший преподаватель кафедры вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)». Россия, 454080 Челябинск, проспект Ленина, 76. E-mail: gavrilovatp@susu.ru.

GAVRILOVA Tatiana Petrovna, Senior Lecturer of Department of Computational Mathematics and High-Performance Computing, Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “South Ural State University (national research university)”. 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080. E-mail: gavrilovatp@susu.ru.